Soluții – clasa a VIII-a

1.Fie n$\in \boldsymbol{N^*}$,astfel incat n=n(x+7)=y(y+3), unde n,y$\in \boldsymbol{N^*}$ => $x^2+7x=y^2+3y$ $|\cdot 4$ ⇔ $4x^2$+28x+7^2-7^2=$4y^2$+12y+3^2-3^2 ⇔ $(2x+7)^2-7^2$=$(2y+3)^2-3^2$ ⇔ $(2x+7)^2-(2y+3)^2=7^2-3^2$ ⇔(2x+7+2y+3)(2x+7-2y-3)=40 ⇔ (x+y+5)(x-y+2)=10, unde x+y+5>x-y+2

=> $\begin{cases} x+y+5=10 \\ x-y+2=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x+y+5=5 \\ x-y+2=2 \end{cases}$

Primul sistem este echivalent cu $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$, pentru care care n=18

Al doilea sistem este echivalent cu $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, care nu convine.

2. i)E(-1)=$(3+k)^2+2^4/3^{2n}$=E(3) şi E(-3)=$(15+k)^2+4^4/15^{2n}$=E(5)

ii)Fie k$\in \boldsymbol{Z}$ şi x_0 rădăcina întreagă a ecuației ⇔ $(x_0^2-2x_0+k)^2+(x_0-1)^4/(x_0^2-2x_0)^{2n}$=k+1 ⇔ $(x_0-1)^4/(x_0^2-2x_0)^2 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $(x_0-1)^4/(x_0-2x_0)^{2n} * (x_0^2-2x_0)^{2n-2} \in \mathbf{Z}$ ⇔ $(x_0-1)^4/(x_0^2-2x_0)^2 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $(x_0^2-2x_0+1/x_0^2-2x_0)^2 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $x_0^2-2x_0+1/x_0^2-2x_0 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $1+1/x_0^2-2x_0 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $x_0^2-2x_0 \in \{-1,1\}$. Dacă $x_0^2-2x_0=-1$ ⇔ $(x_0-1)^2=0$ ⇔ $x_0=1 \in \mathbf{Z}$.

Dacă $x_0^2-2x_0=1$ ⇔ $(x_0-1)^2=2$ ⇔ $x_0=1\pm\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$.

Deci x_0=1 şi înlocuind în ecuație, obținem $(k-1)^2=k+1$ ⇔ $k^2-2k+1=k+1$ ⇔ $k^2-3k=0$ ⇔ k(k-3)=0 ⇔ k$\in$\{0,3\}.

iii)E(2-x)=$(4-4x+x^2-4+2x+k)^2+(2-x-1)^4/(4-4x+x^2-4+2x)^{2n}$=$(x^2-2x+k)^2+(1-x)^4/(x^2-2x)^{2n}$=E(x). Deci, dacă x_0 este soluție a ecuației E(x)=k+1. Cum ecuația are soluție unică, rezultă $x_0=2-x_0$ ⇔ $x_0=1$ şi înlocuind în ecuație obținem k$\in$\{0,3\}. Dar k$\in$**R*** ⇔ k=3 …….

Reciproc, pentru k=3, ecuația devine $(x^2-2x+3)^2+(x-1)^4/(x^2-2x)^{2n}=4$ ⇔ $(x^2-2x+3)^2=4-(x-1)^4/(x^2-2x)^{2n}$ ⇔ $(x^2-2x+1+2)^2 \leq 4$ ⇔ $[(x-1)^2+2]^2 \leq 4$ ⇔ $(x-1)^4+4(x-1)^2+4 \leq 4$ ⇔ $(x-1)^4+4(x-1)^2 \leq 0$ ⇔ x-1=0 ⇔ x=1

Deci k=3

3. a) Fie E simetricul lui S fata de D ⇒

DE||CT si DE$\equiv CT$ ⇒

DETC paralelogram ⇒

TE||CD||AB SI AB$\perp$(SAD) ⇒ TE$\perp$(SAD)

D(T,(SAD))=TE=CD=a

Fie EO$\perp$SA si TE $\perp$(SAD) ⇒

TO$\perp$SA ⇒ d(T, SA)=TO

EO=2AD=2a

$\Delta TEO(\measuredangle E=90^0) \Rightarrow TO=\sqrt{TE^2+EO^2}=a\sqrt{5}$

b) Fie R mijl (CD)

SD||CT si SD||CT $\Rightarrow$ SDTC paralelogram $\Rightarrow R\in TS \Rightarrow R\in(SBT)$

APBR paralelogram $\Rightarrow$ AP||BR si $BR\subset(SBT) \Rightarrow AP\|(SBT)$

4.

a) $\left.\begin{array}{l}\widehat{OAB}=\widehat{ODC}\\ \widehat{AOB}=\widehat{COD}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta OAB\sim\Delta ODC \Leftrightarrow \frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC} \Leftrightarrow$

$VA\perp VC \Leftrightarrow VO^2=OA*OC \Leftrightarrow VO^2=OD*OB \Leftrightarrow VB\perp VD$

b) Fie $d\perp(ABCD)$, $R\in d$.

$BC\cap(VOE)=BC\cap EO=\{M\}$

$\left.\begin{array}{l}RS\|VO\\ R\in(VOE)\end{array}\right\} \Leftrightarrow RS\subset(VOE) \Leftrightarrow S\in(VOE)$ ……

$B\cap(VOE)=BC\cap VS=\{M_1\}=\{M\} \Leftrightarrow M_1=M \Leftrightarrow VS\cap OR\cap BC=\{M\}$

$EV\cap d=\{T\} \Leftrightarrow d\cap(VAD)=\{T\}$.

$\left.\begin{array}{l}RS\|VO \Leftrightarrow \frac{RS}{VO}=\frac{RM}{OM}\\ TR\|VO \Leftrightarrow \frac{TR}{VO}=\frac{ER}{EO}\end{array}\right\} \frac{RS+TR}{VO}=\frac{RM}{OM}+\frac{ER}{EO}=\frac{RM+ER}{OM}=\frac{EM}{OM}=\frac{2OM}{EM}=2 \Leftrightarrow$

RS+RT=2VO.